théorème. *Soit* $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ n \geq 2$ *pour* $k \in \{0,...,n\}$ *on note* $M_k = sup||f^{(k)}(x)||$. *On suppose* M *et* M_k *finis. ALors*

1. M_k *est fini*
2. $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$
3. $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$

Démonstration.

1. *pour tout* $l \in \{0,...,n-1\}$ *par Taylor-Lagrange on a :*

$$\left|f(x+l) - f(x) - lf'(x) - ... - \frac{l^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\right| \leq \frac{i^n M_n}{n!}$$
$$\left|lf'(x) + ... + \frac{l^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\right| - |f(x+l) - f(x)| \leq \frac{i^n M_n}{n!}$$
$$\left|lf'(x) + ... + \frac{l^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\right| \leq 2M_0 + \frac{n^n M_n}{n!}$$

En posant $X(x)$ *le vecteur de* $\mathbb{C}^{n-1}$ *de composantes* $\frac{f^{(k)}(x)}{k!}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 2 & 2^2 & ... & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & ... & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix}$$

On a pour tout x, $||AX(x)||_\infty \leq K := 2M_0 + \frac{n^n M_n}{n!}$ *On définit* $||\cdot|| : M \in M_{n-1}(\mathbb{C}) \to \underset{x\neq 0}{sup}\frac{||Mx||_\infty}{||x||_\infty}$.
Comme A *est de Vandermonde on a* $det(A) \neq 0$ *et donc*

$$||A^{-1}||||AX(x)||_\infty \leq ||A^{-1}||K$$
$$||A^{-1}AX(x)||_\infty \leq ||A^{-1}||K$$
$$||X(x)||_\infty \leq ||A^{-1}||K$$

D'où la majoration des M_k

2. *Encore par Taylor Lagrange on a pour* $x \in \mathbb{R},\ h > 0$

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$

et

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$

d'où

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$$
$$2h|f'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 M_2$$
$$2h|f'(x)| \leq h^2 M_2 + 2M_0$$
$$|f'(x)| \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$$

Le membre de droite est minimal en $\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ *d'où*

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2M_0M_2}}{2} + \frac{\sqrt{2M_0M_2}}{2} = \sqrt{2M_0M_2}$$

et donc

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$$

3. *Par récurrence forte sur n. Pour* $n = 2,\ k = 1$ *le résultat est prouvé en 2. Pour* $k = 0$ *et* $k = n$ *c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang m et soit* $f \in \mathcal{C}^{m+1}$. *Pour* $j \in \{1, ..., m\}$ *en applicant le cas* $n = 2$ $k = 1$ *à* $f^{(j-1)}$ *on a* $M_j^2 \leq 2M_{j-1}M_{j+1}$. *Par hypothèse de récurrence appliqué à* $n = j,\ k = j-1$ *On a*

$$M_{j-1} \leq 2^{\frac{j-1}{2}} M_0^{\frac{1}{j}} M_j^{\frac{j-1}{j}}$$

de même pour $n = m+1-j,\ k = 1$ *sur la fonction* $f^{(j)}$ *On a*

$$M_{j+1} \leq 2^{\frac{m-j}{2}} M_j^{\frac{m-j}{m+1-j}} M_{m+1}^{\frac{1}{m+1-j}}$$

d'où

$$M_j^2 \leq 2^{\frac{m+1}{2}} M_0^{\frac{1}{j}} M_j^{\frac{j-1}{j}+\frac{m-j}{m+1-j}} M_{m+1}^{\frac{1}{m+1-j}}$$

en élenvant à la puissance $\frac{j(m+1-j)}{m+1}$ *il vient*

$$M_j^{2^{\frac{j(m+1-j)}{m+1}}} \leq 2^{\frac{j(m+1-j)}{2}} M_0^{1-\frac{j}{m+1}} M_j^{\frac{2(jm+j-j^2)}{m+1}-1} M_{m+1}^{\frac{j}{m+1}}$$
$$M_j \leq 2^{\frac{j(m+1-j)}{2}} M_0^{1-\frac{j}{m+1}} M_{m+1}^{\frac{j}{m+1}}$$

Ce qui achève la récurrence.